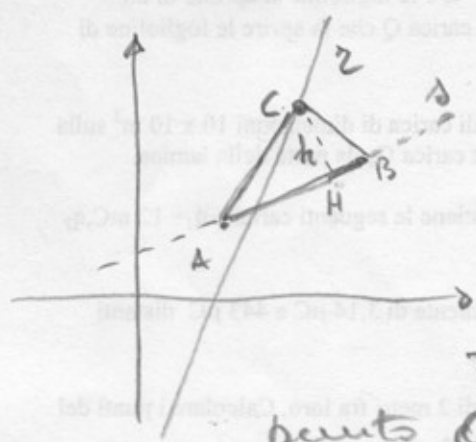


Dati i punti  $A(2,2)$   $B(5,3)$  determinare sulla retta di equazione  $3x - y = 6$  un punto  $C$  tale che l'area del triangolo  $ABC$  misuri 5.

L'area di un triangolo è data da  $S = \frac{b \cdot h}{2}$  dove  $b$  è la base e  $h$  è l'altezza.

In questo caso abbiamo già l'area  $S = 5$  e abbiamo determinare  $C$ , un vertice del triangolo in modo da avere l'altezza giusta per ottenere  $S = 5$ . La base  $b$  è la lunghezza del lato  $AB$ .



Il problema richiede che il punto  $C$  giaccia sulla retta  $z$  di equazione  $3x - y = 6$  ciò significa che le sue coordinate devono soddisfare l'equazione di  $z$ .

Fissato un  $x$  a piacere la  $y$  del punto  $C$  dovrà essere  $y = 3x - 6$

Quindi possiamo scrivere  $C(x, 3x - 6)$ .

L'altezza  $h = CH$  sarà quindi data dalla distanza fra il punto  $C$  e la retta, chiamiamola  $s$ , passante per  $A$  e  $B$ . Calcoliamo allora l'eq. della retta  $s$ :

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow y-2 = \frac{x-2}{3} \Rightarrow 3y-6 = x-2 \Rightarrow \boxed{x-3y+4=0}$$

Ora con  $C$  e l'equazione di  $s$  con la formula della distanza fra un punto e una retta possiamo calcolare  $h$

$$h = d(P, s) = \frac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot x + 3(3x-6) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \Rightarrow$$

Calcoliamo la base  $b = \overline{AB}$  con la formula della distanza fra due punti:

$$b = \sqrt{(2-5)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Applichiamo la formula della distanza:

$$\frac{b \cdot h}{2} = S \Rightarrow \sqrt{10} \cdot \frac{|x - 3(3x-6) + 4|}{2\sqrt{10}} = 5$$

$$\Rightarrow |x - 9x + 18 + 4| = 10 \Rightarrow \boxed{|-8x + 22| = 10}$$

È una equazione con il valore assoluto che diventa una doppia equazione:

$$1) -8x + 22 = 10 \Rightarrow -8x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-8} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$2) 8x - 22 = 10 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{8} \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

Quindi ci sono due punti C che permettono di costruire il triangolo del problema con area pari a 5

Calcoliamo le ordinate y dei due punti C:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 3x - 6 \rightarrow y = 3 \cdot \frac{3}{2} - 6 = \frac{9}{2} - 6 = \frac{9-12}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad C_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3x - 6 \rightarrow y = 3 \cdot 4 - 6 \rightarrow y = 12 - 6 \rightarrow y = 6 \end{cases} \quad C_2(4, 6)$$