Compito 18.4.2011 VC (MATEMATICA)

1

1. $y = e^{3x} + 1$ tangente in $x_0 = \frac{\ln(2/3)}{3}$

Calcoliamo la derivata in x_0: $y' = 3e^{3x}\Big|_{x=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}} = 3e^{3\frac{1}{3}\ln\frac{2}{3}} =$

$= 3e^{\ln\frac{2}{3}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ quindi $f'(x_0) = 2$.

Questo è il valore del coefficiente angolare della retta tangente. Ci servono le coordinate del punto P

$(x_0, f(x_0)) \Rightarrow f(x_0) = e^{3\frac{\ln(2/3)}{3}} + 1 = e^{\ln\frac{2}{3}} + 1 =$

$= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow P\left(\frac{\ln(2/3)}{3}, \frac{5}{3}\right)$

L'equazione della retta si calcola con $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$\Rightarrow y - \frac{5}{3} = 2\left(x - \frac{\ln(2/3)}{3}\right) \Rightarrow \boxed{y = 2x - \frac{2}{3}\ln(2/3) + \frac{5}{3}}$

2. Numero delle soluzioni di $x^3 - 3x^2 + k = 0$ al variare di k.

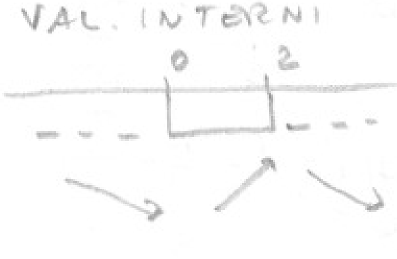
Possiamo trasformare la equazione parametrica nel sistema:

$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = +k \end{cases}$ e cercare i punti x nei quali la curva rappresentata da $y = -x^3 + 3x^2$ si interseca con la retta orizzontale $y = +k$ per un dato valore di k

La curva in esame è una cubica. Disegnamone un grafico qualitativo limitandoci alla derivata:

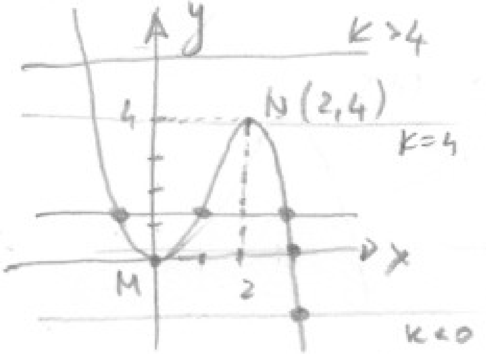
$y' = -3x^2 + 6x > 0 \rightarrow x(-3x+6) > 0$ $\quad x = 0$

$-3x + 6 = 0 \rightarrow x = -\frac{6}{-3} = 2$.



$f(0) = 0 \quad f(2) = -8 + 3 \cdot 4 = 12 - 8 = 4$

$M(0,0) \quad N(2,4)$



Quindi possiamo affermare che

per $k<0$ c'è una sola soluzione

per $k=0$ 3 sol. di cui 2 coincidenti

per $0<k<4$ 3 sol. distinte

per $k=4$ 3 sol. di cui due coincidenti

per $k>4$ 1 sola soluzione -

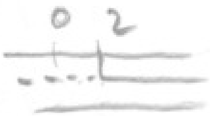
3. Individuare i punti di non derivabilità della funzione $f(x)=\frac{|x-2|}{x}$ e calcolare le eq. delle rette tangenti in tali punti.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x} & \text{per } x-2\geq 0\\ \frac{-(x-2)}{x} & \text{per } x<2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x} & x\geq 2 \quad (1)\\ \frac{2-x}{x} & x<2 \quad (2)\end{cases}$$

Disegno il grafico della (1)

INT. per $x=2$ $y=0$; DERIVATA: $y'=\frac{1\cdot x-(x-2)}{x^2}=\frac{x-x+2}{x^2}=\frac{2}{x^2}>0 \quad \forall x\neq 0$ crescente

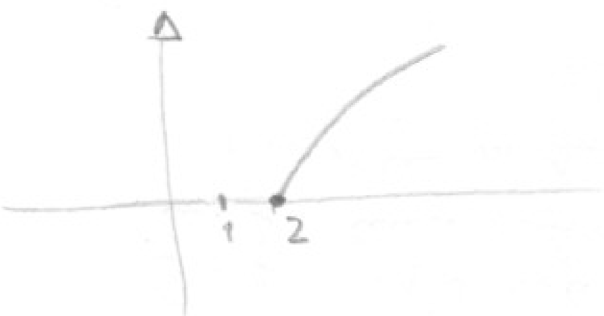
Segno: $x-2>0 \to x>2$
$x>0$



positiva nel suo dominio $x\geq 2$

$y''=D\,2x^{-2}=-4x^{-3}=$
$=-\frac{4}{x^3}>0$

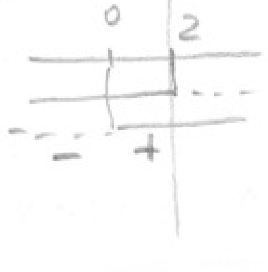
per $x<0$ la f'' è positiva ma per $x>0$ e quindi per $x\geq 2$ $f''<0$ quindi ha concavità verso il basso



Considero la (2)

$\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{2}=\frac{2-2}{2}=0$. In $x=0$ ha un asintoto verticale $\lim_{x\to 0}\frac{2-x}{x}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty$

Segno $2-x>0 \to x<2$
$x>0$

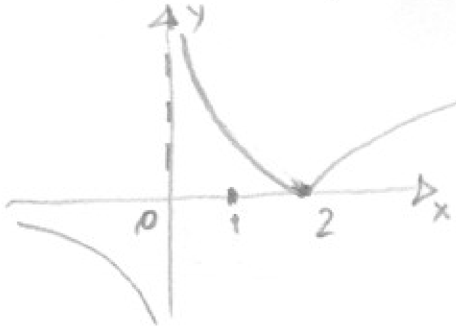


Calcoliamo la derivata:

$$y' = \frac{-1\cdot x-(2-x)\cdot 1}{x^2} = \frac{-x-2+x}{x^2} = \frac{-2}{x^2} > 0 \text{ per nessun } x$$

quindi è decrescente nel suo dominio.

Poiché in $(0,2)$ è positiva, è decrescente e in $x=2$ vale 0 si ha



Possiamo verificare se la concavità è verso l'alto con la $f''(x)$

$$f''(x) = D\left(\frac{-2}{x^2}\right) = D\, -2x^{-2} = -2\cdot(-2)x^{-3} =$$

$$= \frac{+4}{x^3} > 0 \text{ per } x>0$$

Calcoliamo derivata destra e sinistra in $x=2$

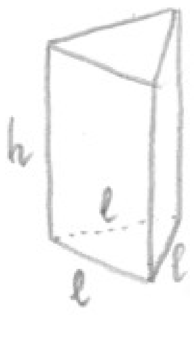
$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{2}{x^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

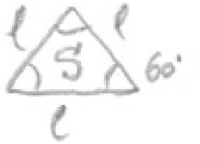
Le rette tangenti in $P(2,0)$ hanno equazioni:

a) $y-0 = \frac{1}{2}(x-2) \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x - 1}$

b) $y-0 = -\frac{1}{2}(x-2) \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2} + 1}$

4.





$$S = \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen} 60° = \frac{1}{2} l^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

area di base

$$V = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Superficie laterale $= 3 \cdot l \cdot h$

Superficie totale $= 3l \cdot h + 2\, l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{cases} 3l\cdot h + \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 = k & \leftarrow \text{eq. vincolare} \\ V = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \cdot h & \leftarrow \text{funzione da massimizzare} \end{cases}$$

posto
$x = l$
$z = h$
$y = V$
$k = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

$$\begin{cases} 3xz + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \to z = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{3x} \Rightarrow z = \dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{6x} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot z \to y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{6x} \Rightarrow y = \dfrac{9x^2-3x^4}{24x} \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{y = \dfrac{3x^2-x^4}{8x}}$ Calcoliamo la derivata.

(con $x>0$)

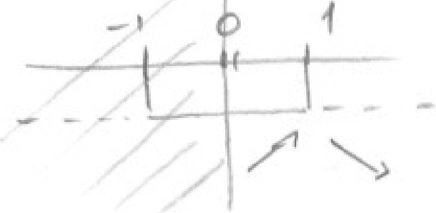
$$y' = \frac{(6x-4x^3)\cancel{8}x - (3x^2-x^4)\cancel{8}}{8\,\cancel{64}\,x^2} = \frac{6x^2-4x^4-3x^2+x^4}{8x^2}$$

$\Rightarrow y' = \dfrac{-3x^4+3x^2}{8x^2} > 0$ $N>0 \to -3x^4+3x^2>0 \to x^2(-3x^2+3)>0$

$D>0 \ \forall x \neq 0$ $x^2>0 \ \forall x\neq 0$

basta studiare:

$-3x^2+3>0$ (VALORI INTERNI) $-3x^2 = 3 \to x^2 = 1 \quad x = \pm 1$



$x_0 = 1$ PUNTO DI MASSIMO

Calcoliamo $z_0 = \dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{6x}\Bigg|_{x=x_0=1} = \dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Quindi il prisma di volume massimo di area $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

ha $l = 1$ cm e $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

---

5. T. di Lagrange $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ con $c \in]a,b[$
e f continua in $[a,b]$
e derivabile in $]a,b[$

$f(x) = e^{3x}+1$ è una funzione esponenziale traslata verso l'alto di 1 unità e con esponente $3x$

E' quindi continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e a maggior ragione in $[-2,0]$

Calcoliamo $f(-2) = e^{-3\cdot 2}+1 = e^{-6}+1$; $f(0) = e^0+1 = 2$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{e^{-6}+1-2}{-2-0} = \dfrac{e^{-6}-1}{-2} = \dfrac{1-e^{-6}}{2}$ Calcoliamo $f'(x) = 3e^{3x}$

$3e^{3x} = \dfrac{1-e^{-6}}{2} \Rightarrow e^{3x} = \dfrac{1-e^{-6}}{6} \Rightarrow 3x = \ln\left(\dfrac{1-e^{-6}}{6}\right) \Rightarrow c = x = \dfrac{\ln\left(\frac{1-e^{-6}}{6}\right)}{3}$