Compito VC 28.2.2011 ①

1. Assegnata la funzione $f(x) = a \cdot e^x/(b+x)$ determinare a e b in modo che la funzione abbia un estremo relativo in $P(0, -1/2)$

Condizione di appartenenza $f(-\frac{1}{2}) = 0$

$$-\frac{1}{2} = \frac{a \cdot e^0}{b+0} \rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{a}{b} \rightarrow \boxed{a = -\frac{b}{2}}$$

Condizione di tangenza:

la funzione deve essere tangente in P ad una retta orizzontale, dato che P deve essere un estremo relativo (ed è una funzione derivabile):

$f'(0) = 0$ – Calcoliamo la derivata di $f(x)$:

$$y' = \frac{ae^x(b+x) - ae^x \cdot 1}{(b+x)^2} \Rightarrow \left.\frac{ae^x(b+x-1)}{(b+x)^2}\right|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ae^0(b-1)}{b^2} = 0 \rightarrow a(b-1) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

e quindi $\boxed{a = -\frac{1}{2}}$ – La funzione è quindi

$$y = \frac{-\frac{1}{2}e^x}{1+x} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{y = \frac{-e^x}{2(1+x)}}$$

Studiamo la $f(x)$:

$$y = \frac{-e^x}{2(1+x)}$$

1) Dominio $x \neq -1$ $D: (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2) Int. assi $x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$ $A(0, -\frac{1}{2})$

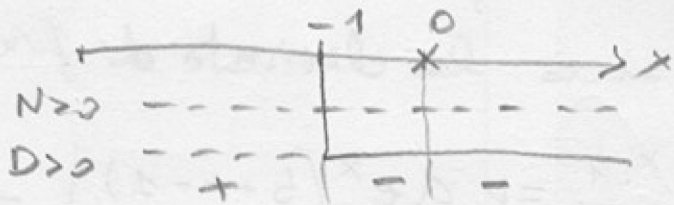
$y = 0 \rightarrow -e^x = 0$ Impossibile, quindi nessuna intersezione con l'asse x

3) Simmetria pari o dispari:

$f(-x) = \dfrac{-e^{-x}}{2(1-x)} \neq \pm f(x)$ non ha simmetrie pari o dispari

4) Segno: $N > 0 \rightarrow -e^x > 0$ mai, numeratore negativo $\forall x \in D$

$D > 0$ $2(1+x) > 0 \rightarrow 1 + x > 0 \rightarrow \boxed{x > -1}$



5) LIMITI

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-e^x}{2(1+x)} = \left[\dfrac{0}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow y = 0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$\lim_{x \to -1^-} \dfrac{-e^x}{2(1+x)} = \left[\dfrac{-e^{-1}}{0}\right] = +\infty \Rightarrow x = -1$ AS. VERTICALE

NOTA: I SEGNI DEI LIMITI SONO DETERMINATI DAL SEGNO DI $f(x)$

$\lim_{x \to -1^+} \dfrac{-e^x}{2(1+x)} = \left[\dfrac{-e^{-1}}{0}\right] = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-e^x}{2(1+x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\infty$ perché l'esponenziale "corre" più velocemente all'infinito di qualsiasi polinomio.

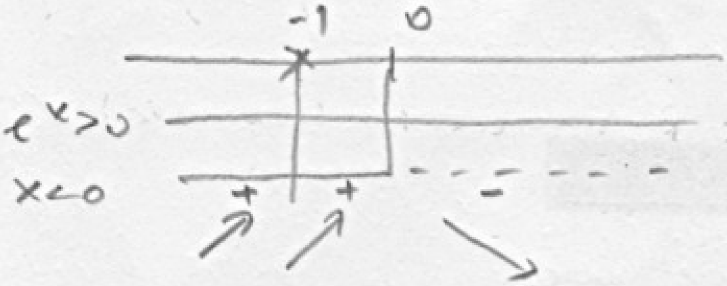
Ci potrebbe essere asintoto obliquo, verifichiamolo:

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{-e^x}{2(1+x)x} = \infty$ per le ragioni di prima, quindi non c'è asintoto obliquo $(x \to \infty)$

6) Derivata: $y' = \dfrac{-2e^x(1+x) + 2e^x}{4(1+x)^2} > 0$

$2e^x[1-(1+x)]>0 \rightarrow 2e^x(\cancel{1}-\cancel{1}-x)>0$

$\rightarrow -2x\,e^x>0 \qquad e^x>0 \quad \forall x \in D \qquad -2x>0 \rightarrow x<0$



$f(0) = \dfrac{-e^0}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ è un massimo relativo di f