3. Determinare il cilindro retto di volume massimo che abbia superficie totale $24\pi\, cm^2$.

La funzione da ottimizzare è $V = \pi r^2 h$ cioè il volume del cilindro.

La superficie totale è data da $S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$ che deve essere $24\pi\, cm^2$.

Poniamo $y = V$, $z = h$, $x = r$.

La superficie totale diventa: $2\pi r h + 2\pi r^2 = 24\pi$ che semplificata da $rh + r^2 = 12$, sostituendo le variabili:

$x \cdot z + x^2 = 12$ da cui $\boxed{z = \frac{12 - x^2}{x}}$ (1). Il volume diventa:

$\boxed{y = \pi x^2 \cdot z}$ (2) il sistema è dunque $\begin{cases} z = \dfrac{12 - x^2}{x} \\ y = \pi x^2 \cdot z \end{cases}$

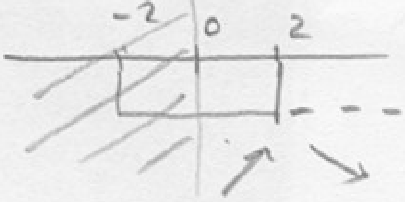
$$\Rightarrow y = \pi x^2 \left(\frac{12 - x^2}{x} \right) \rightarrow y = \frac{12\pi x^2 - \pi x^4}{x}$$

$$y' = \frac{(2 \cdot 12\pi x - 4\pi x^3)x - (12\pi x^2 - \pi x^4)}{x^2} = \frac{24\pi x^2 - 4\pi x^4 - 12\pi x^2 + \pi x^4}{x^2} =$$

$$= \frac{-3\pi x^4 + 12\pi x^2}{x^2} = \frac{x^2 \pi (-3x^2 + 12)}{x^2} > 0 \rightarrow -3x^2 + 12 > 0$$

VAL. INTERNI

$x^2 = \frac{12}{3} = 4 \quad x = \pm 2$



hanno senso solo i valori $x > 0$ ($x = r$ positivo)

Il valore di z (altezza) corrispondente è dato dalla (1) $\Rightarrow z = \frac{12 - 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Quindi il cilindro deve avere

$r = 2$ e $h = 4$. Un cilindro che ha altezza uguale al diametro si dice equilatero