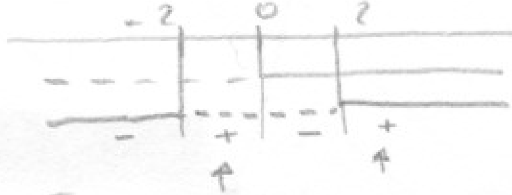
$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$ STUDIO DI FUNZIONE

1) Dominio $\frac{x}{x^2-4} > 0$ $N>0$ $x>0$

$D>0$ $x^2-4>0$ VAL. EST. $x<-2$ $x>2$

$x^2-4 \neq 0$ $x \neq \pm 2$



$\boxed{D: (-2,0) \cup (2,+\infty)}$

2) Int. assi $x=0$ non fa parte del dominio

$y=0 \to \ln\left(\frac{x}{x^2-4}\right)=0$, il logaritmo è nullo quando il suo argomento è uguale a 1 $\to \frac{x}{x^2-4}=1 \to \frac{x}{x^2-4}-1=0 \to \frac{x-x^2+4}{x^2-4}=0 \to -x^2+x-4=0$

$x^2-x+4=0 \to x=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{2} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{17}}{2} \simeq -1{,}56 \\ \frac{1+\sqrt{17}}{2} \simeq 2{,}56 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} A(-1{,}56;0) \\ B(2{,}56;0) \end{matrix}}$

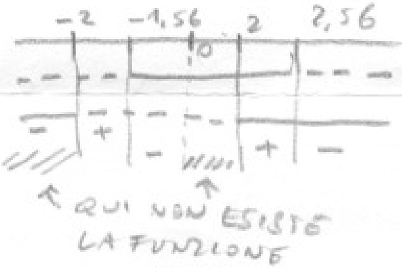
3) Segno di $f(x)$

$\ln\left(\frac{x}{x^2-4}\right)>0$ se l'argomento è >1

$\Rightarrow \frac{x}{x^2-4}>1 \to$

$\to \frac{-x^2+x-4}{x^2-4}>0$ $N>0$ VAL. INT. FRA x_A e x_B

$D>0$ VAL EST $x=-2$ $x=2$



$\boxed{f(x)>0 \ \forall x \in (-2;-1{,}56) \cup (2;2{,}56)}$

4) LIMITI

a) $\lim_{x\to -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{2}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ $\boxed{x=-2 \text{ AS. VERT.}}$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{0}{-4}\right] = 0^+ \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$ $\boxed{x=0 \text{ AS. VERT.}}$

c) $\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \left[\frac{2}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ $\boxed{x=2 \text{ AS. VERT.}}$

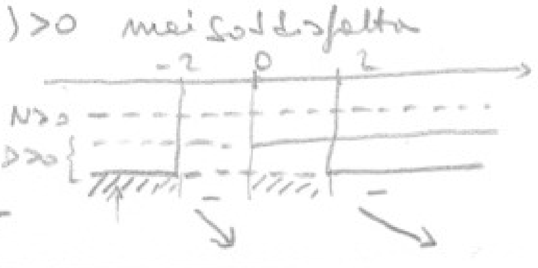
d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0^+ \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$

5) DERIVATA DI $f(x)$: $D\ln\left(\frac{x}{x^2-4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x}{x^2-4}\right)} \cdot D\left(\frac{x}{x^2-4}\right) = \frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{1(x^2-4)-2x(x)}{(x^2-4)^2} =$

$= \frac{(x^2-4)(x^2-4-2x^2)}{x(x^2-4)^2} = \frac{(x^2-4)(-x^2-4)}{x(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2-4)(x^2+4)}{x(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2+4)}{x(x^2-4)}$ per $x \neq \pm 2$

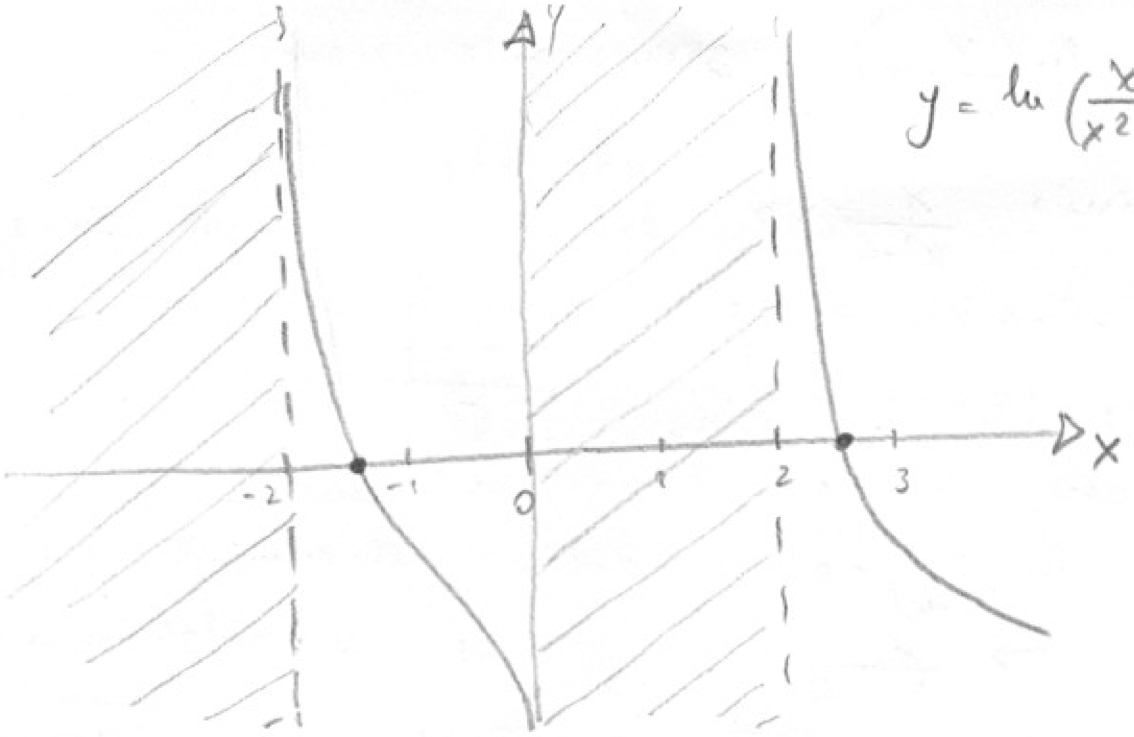
Studiamo il segno di $f'(x)$ $N>0 \to -(x^2+4)>0$ mai soddisfatta

$D>0$ $x(x^2-4)>0 \to x>0 \cup$ VAL. EST. $x=\pm 2$



La funzione in $(-2,0) \cup (2,+\infty)$ (DOMINIO)

la $f'(x)$ è negativa $\forall x \in D$ quindi è sempre decrescente



$y = \ln\left(\frac{x}{x^2-4}\right)$